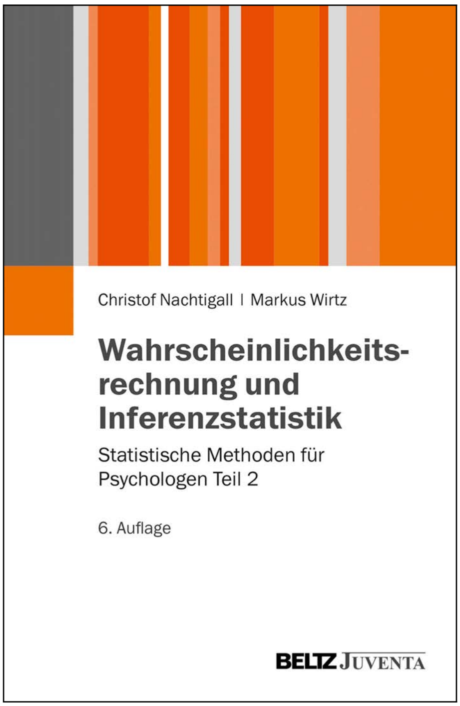

Leseprobe aus Nachtigall und Wirtz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik, ISBN 978-3-7799-2890-4

http://www.beltz.de/de/nc/verlagsgruppe-beltz/gesamtprogramm.html?isbn=978-3-7799-2890-4

Leseprobe aus Nachtigall und Wirtz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik, ISBN 978-3-7799-2890-4

Kapitel I: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wofür brauchen Psychologen Wahrscheinlichkeitsrechnung? Hat man sich als Studierender der Psychologie mit der Statistik als Teil des Lehrplans gerade abgefunden, so stellt sich beim Thema „Wahrscheinlichkeit" erneut die Frage nach dem Sinn. Besteht doch zunächst die Motivation vieler Studierender darin, mehr über Menschen, ihr Denken, Fühlen und Handeln lernen zu wollen. Man möchte salopp gesagt herausbekommen, wie Menschen funktionieren. Es gilt z.B. zu ermitteln, unter welchen Bedingungen Menschen zu Gewalt neigen, mit welcher Therapie eine bestimmte psychische Störung behandelt werden kann oder welche Strategien für ein erfolgreiches Studium günstig sind. In wissenschaftlicher Sprechweise geht es darum, Zusammenhänge zwischen interessierenden Merkmalen zu finden. Das Konzept „Wahrscheinlichkeit" ist hierbei auf zwei Ebenen von Bedeutung.

Zum einen handelt es sich bei Zusammenhängen in der Psychologie fast immer um stochastische Zusammenhänge (vgl. Band I, Abschnitt II.C). Damit ist gemeint, dass bei Kenntnis eines Merkmals X die Ausprägung eines anderen Merkmals Y nicht präzise vorhergesagt werden kann. Wird z.B. bei einer Person mit Panikstörung eine Konfrontationstherapie durchgeführt, so wird diese Therapie *wahrscheinlich* helfen. Man kann jedoch nicht sicher sein. Stehen mehrere Therapien zur Verfügung, so sollte ein Therapeut diejenige auswählen, welche mit *größerer Wahrscheinlichkeit* hilft. Alle Aussagen in der Psychologie sind gewissermaßen Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Ist diese Herangehensweise unserer alltäglichen Denkweise so fremd? Kalkulieren wir nicht auch, wenn wir ins Kino gehen, ob der Film sich wohl lohnt, hoffen wir nicht, bei einem Rendezvous bessere Chancen zu haben, wenn wir uns schick machen oder uns auf eine bestimmte Weise verhalten. Wir stellen ständig Kalkulation darüber an, welche Resultate unsere Handlungen wahrscheinlich erzielen werden.

Daher müssen wir uns mit dem Konzept „Wahrscheinlichkeit" vertraut machen. Unsere psychologischen Aussagen sollen wissenschaftlichen Kriterien genügen, somit ist es unumgänglich, *Wahrscheinlichkeiten* möglichst präzise und objektiv angeben zu können. Aus diesem Grund wird in den folgenden Abschnitten allerlei Aufwand getrieben, um präzise und objektiv festzulegen, was Wahrscheinlichkeit ist und wie die Wahrscheinlichkeiten von interessierenden Ereignissen bestimmt werden können.

Es gibt noch einen weiteren Grund, warum die Beschäftigung mit *Wahrscheinlichkeit* für Psychologen wichtig ist. Dabei geht es wieder mehr um das Thema Statistik. Warum Statistik für Psychologen wichtig ist, war ein zentrales Thema in Band I. Es wurden Verfahren beschrieben, die dazu dienen, die Informationen aus Stichprobendaten zusammenzufassen und daraus inhaltliche Schlüsse zu ziehen. Behandelt man z.B. eine Gruppe von 30 Patienten mit einer neuen Therapie, so kann man am Ende der Therapie den Anteil der geheilten Patienten bestimmen und auf dieser Basis Aussagen über den Therapieerfolg machen. Allerdings bezieht sich dieses Ergebnis zunächst nur auf die untersuchte Stichprobe. Nun ist es aber wünschenswert, allgemeine Aussagen über die Wirksamkeit einer Behandlungsmethode zu treffen. Es soll über die Stichprobe hinaus auf eine bestimmte Population, z.B. alle erwachsenen Deutschen, geschlossen werden. Schließlich möchte der Therapeut wissen, ob dieses neue Verfahren generell zu empfehlen ist. Diese Frage ist typisch für die *Inferenzstatistik* oder *schließende Statistik*, mit der sich dieser Band schwerpunktmäßig befasst. In der Inferenzstatistik geht es darum, aufgrund von Ergebnissen aus Stichproben auf die Population zu schließen. Hier taucht nun ein zentrales Problem auf: Selbst wenn z.B. in der Stichprobe 90% der Patienten geheilt wurden, so kann die Situation in der Population ganz anders aussehen. Vielleicht wurden zufällig nur Leute in die Studie aufgenommen, die auf die Therapie gut ansprechen. Möglicherweise gibt es außerhalb der untersuchten Stichprobe *niemanden*, dem die Therapie hilft. Dies ist zwar *sehr unwahrscheinlich*, aber möglich. In Stichproben können die Ergebnisse ganz anders aussehen als in der Population, je nachdem, welche Personen zur Stichprobe gehören. Hier eröffnet sich das zweite wichtige Anwendungsgebiet von Wahrscheinlichkeitsrechnung: Wir brauchen dieses Konzept, um den „Stichprobenfehler" (das ist die Abweichung von Ergebnissen aus Stichproben von dem, was in der Population tatsächlich vorliegt) in den Griff zu bekommen.

Aus diesem Grunde gliedert sich dieses Buch in 2 Kapitel: Zunächst wird in *Kapitel I - Wahrscheinlichkeitsrechnung* geklärt, was Wahrscheinlichkeit ist und wie man damit umgeht. *Kapitel II - Inferenzstatistik* beschäftigt sich anschließend mit dem Schließen von Stichproben auf die Population. Letztlich ist dies das zentrale Anliegen wissenschaftlicher Psychologie: möglichst allgemeine Aussagen über Regelhaftigkeiten in menschlichem Denken, Fühlen und Handeln zu machen.

Kapitel I ist folgendermaßen aufgeteilt: In Abschnitt *A* wird dargestellt, was wir unter zufälligen Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten verstehen. Dieser Abschnitt ist zentral für das Verständnis von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik. Die Abschnitte *B bis D* beschäftigen sich mit dem praktischen Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten. In *B* werden wir die wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennenlernen. Ab Abschnitt *C* wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung wieder mehr mit der Statistik zusammengeführt. Ging es in der deskriptiven Statistik um psychologisch relevante Variablen in Stichproben und deren Kennwerte, so werden nun Variablen behandelt, deren Werte noch nicht vorliegen sondern sich zufällig ergeben können: Wir sprechen von *Zufallsvariablen*. Abschnitt *C* stellt das Konzept der Zufallsvariablen und ihre Kennwerte vor. Im letzten Abschnitt *D* geht es ebenfalls in Analogie zur deskriptiven Statistik darum, wie man mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Zusammenhänge zwischen Zufallsvariablen beschreiben kann.

Leseprobe aus Nachtigall und Wirtz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik, ISBN 978-3-7799-2890-4

I.A Zufall und Wahrscheinlichkeit

I.A.1 Zufällige Ereignisse

Bevor wir klären, was unter Wahrscheinlichkeit verstanden wird, präzisieren wir zunächst, über *wessen* Wahrscheinlichkeit wir sprechen. Hier hat sich der Begriff der *zufälligen Ereignisse* eingebürgert. Ereignisse sind all die Dinge, für deren Eintreten man sich interessiert, z.B. die Heilung (oder Nichtheilung) von Patienten in einer Therapie, das Verschlafen (oder Nichtverschlafen) vor einer Methodenvorlesung, das Kennenlernen eines „Traummannes" (oder einer „Traumfrau") auf einer Party oder die berühmten 6-Richtigen im Lotto. Ein Ereignis wird als „zufällig" bezeichnet, wenn sein Eintreten unter den gegebenen Bedingungen nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann. Alle oben genannten Beispiele sind offensichtlich solche „zufälligen Ereignisse". Wir sind ständig von zufälligen Ereignissen umgeben. Der Erfolg einer Therapie bei einem Patienten z.B. ist immer ein zufälliges Ereignis. Dies bedeutet jedoch nicht, dass der Therapieerfolg genauso wenig vorhergesagt werden kann wie das Ergebnis eines Münzwurfs oder das Wetter des kommenden Sommers. Gute Therapien zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Erfolg mit großer Sicherheit eintrifft. Nur wirkt keine psychologische Therapie mit 100%iger Sicherheit. Therapieerfolg steht nicht *vollkommen* fest, deshalb sprechen wir von einem zufälligen Ereignis.

Um präzise mit zufälligen Ereignissen umgehen zu können, werden nun einige technische Begriffe eingeführt. Dabei bedienen wir uns der Mengenlehre. Mengenlehre ist gewissermaßen die Sprache, in der zufällige Ereignisse aufgeschrieben werden.

Die Menge all dessen, was überhaupt passieren kann, wird als *Ereignisraum* Ω (griechisch *omega*) bezeichnet. Ereignisse sind formal definiert als Teilmengen von Ω. Die folgenden Beispiele illustrieren diese Begriffe.

Beispiel: Beim Werfen einer Münze sind „Zahl" und „Wappen" mögliche Ereignisse. $\Omega = \{$„Zahl", „Wappen"$\}$.

Beim Werfen eines Würfels sind die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 mögliche Ereignisse. Auch das Werfen einer Augenzahl von mehr als vier Augen ist ein mögliches Ereignis. $\Omega = \{1,..,6\}$.

Beim Erfolg einer Therapie könnte man z.B. zwei interessierende Ereignisse unterscheiden: $\Omega = \{$*Erfolg, kein Erfolg*$\}$.

Leseprobe aus Nachtigall und Wirtz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik, ISBN 978-3-7799-2890-4

Durch Verknüpfung von Ereignissen ergeben sich neue Ereignisse. Betrachten wir die Ereignisse Z: ein Patient leidet an einer Zwangsstörung, und D: ein Patient leidet an einer depressiven Störung. Es können auch depressive Patienten mit Zwangsstörung, depressive Patienten ohne Zwangsstörung oder Patienten, die eine Zwangsstörung oder eine Depression haben, vorkommen. Ein solches Verknüpfen von Ereignissen zu neuen Ereignissen wird ebenfalls mit den Symbolen der Mengenlehre beschrieben.

Bleiben wir der Einfachheit halber beim Beispiel des Würfelwurfes: Sei A das zufällige Ereignis, beim Würfeln eine gerade Zahl zu erzielen, und B das zufällige Ereignis, eine Zahl größer als 4 zu erzielen. Der englische Mathematiker *John Venn* (1834-1923) entwickelte die folgende Art der grafischen Darstellung, mit der Mengen und ihre Beziehungen verdeutlicht werden können. Dabei repräsentieren Ellipsen die betrachteten Ereignisse. Bezeichnet werden Ereignisse traditionell mit großen Buchstaben A, B, C... . Der Ereignisraum Ω wird als viereckiger Rahmen dargestellt, in dem die anderen Ereignisse enthalten sind. Ω wird als das „sichere Ereignis“ bezeichnet.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2,4,6\}$

$B = \{5,6\}$

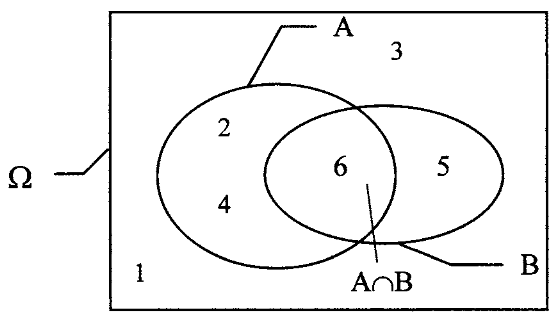

Abbildung 1. Ein sogenanntes Venn-Diagramm veranschaulicht die Mengenbegriffe.

Die Ereignisse A und B sind Teilmengen von Ω. Eine Menge ist genau dann Teilmenge einer anderen Menge, wenn alle ihre Elemente in der anderen Menge enthalten sind. Beispielsweise ist B keine Teilmenge von A, da die 5 nicht in A enthalten ist.

Die folgende Liste zeigt, wie durch Verknüpfung von Ereignissen neue Ereignisse entstehen.

$A \cap B$: Die Schnittmenge von A und B bezeichnet das Ereignis, dass sowohl A als auch B eintreten. Im Beispiel bedeutet dies sowohl eine gerade Zahl, als auch eine Zahl größer 4 zu werfen. Es ist $A \cap B = \{6\}$. Im Venn-Diagramm (vgl. Abb. 1) ist die Schnittmenge der Bereich, in dem sich A und B überschneiden. Es gilt: $A \cap B = B \cap A$.

$A \cup B$: Die Vereinigungsmenge von A und B bezeichnet das Ereignis, dass A oder B (oder beide) eintreten. Im Beispiel ist $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

Leseprobe aus Nachtigall und Wirtz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik, ISBN 978-3-7799-2890-4

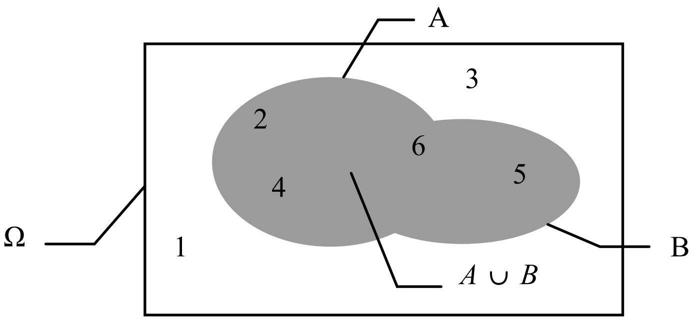

Abbildung 2: Darstellung der Vereinigungsmenge A∪B.

-A (nicht A) bezeichnet das Ereignis, dass A *nicht* eintritt (andere Schreibweise: A^c oder $\overline{A}$). -A heißt das *Gegenereignis* zu A. Im Beispiel ist -A={1,3,5}; -B={1,2,3,4}.

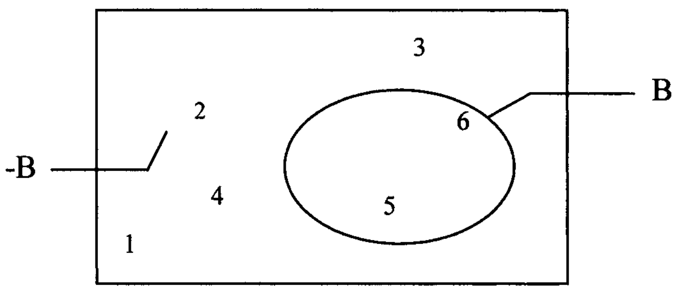

Abbildung 3: Darstellung der Ereignisse B und -B.

A\B (A ohne B) bezeichnet die Menge der Ereignisse, bei denen A, jedoch *nicht* B eintritt. Im Beispiel ist A\B = {2, 4}. Es gilt A\B = A∩-B.

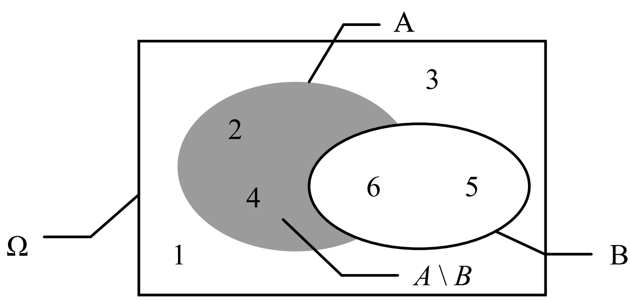

Abbildung 4: Darstellung von A\B.

Ein Ereignis $C=\{\omega\}$, (ω ist der kleine griechische Buchstabe Omega), das nicht als eine Kombination anderer Ereignisse beschrieben werden kann, wird als *Elementarereignis* bezeichnet. Das Ereignis eine 6 zu würfeln ($C=\{6\}$) ist ein Elementarereignis. Die Ereignisse A und B im Beispiel sind keine Elementarereignisse.

Die leere Menge $\varnothing = \{\}$ ist die Menge, die keine Elemente enthält. Sie ist ebenfalls eine Teilmenge von Ω und wird als das „unmögliche Ereignis" bezeichnet. Sie wird der Vollständigkeit halber eingeführt, damit jedes Ereignis auch ein Gegenereignis hat. Es ist $\varnothing = -\Omega$.

Beispiel: Eine Münze werde fünfmal geworfen. Sei A das Ereignis, mindestens 3 mal „Zahl" zu erzielen und B das Ereignis, bei den letzten beiden Würfen jeweils „Wappen" zu werfen.

Ω besteht also aus allen möglichen 5-stelligen „W"-"Z"-Folgen (z.B.: W,Z,W,Z,Z). A und B sind Teilmengen von Ω. Es ist

$-A$: Höchstens zweimal Zahl,

$-B$: Mindestens einmal Zahl im 4. oder 5. Wurf,

$A \cap B$: {Z,Z,Z,WW},

$A \cup B$: Entweder soll mindestens dreimal Zahl fallen oder die letzten beiden Würfe müssen Wappen zeigen,

$A \setminus B$: Alle Ereignisse in A ohne {Z,Z,Z,W,W}.

Damit haben wir geklärt, was unter zufälligen Ereignissen verstanden wird und wie aus zufälligen Ereignissen andere Ereignisse durch Verknüpfung entstehen. Dabei haben wir vermieden, das *Wesen* des Zufalls zu erklären. Gibt es Zufall überhaupt? Offensichtlich können die meisten Ereignisse nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden. Bereits der Wetterbericht für die kommende Woche macht dies deutlich. Aber wenn unser Wissen über die Entstehungsbedingungen von Ereignissen zunehmend wächst, könnte man nicht nach und nach alles exakt vorhersagen? Diese Überlegung des Philosophen und Mathematikers Pierre-Simon Laplace (1749-1827) markiert den deterministischen Pol in der Debatte um das Wesen des Zufalls. Und noch Einstein beharrte darauf, dass Gott nicht würfelt. Auf der anderen Seite besagt die heutige Sicht der Quantenphysik, dass es zumindest auf der Ebene des Mikrokosmos eine Determiniertheit nicht gibt, es existiert vielmehr eine grundsätzliche Unbestimmtheit im Verhalten von Elementarteilchen, der auch durch noch so genaue Kenntnis der aktuellen Zustände solcher Teilchen prinzipiell nicht beizukommen ist.

Die Frage nach dem Wesen des Zufalls soll an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden. Woran es auch immer liegen mag - in der Praxis, speziell in der psychologischen Praxis sind die meisten interessierenden Ereignisse gemäß obiger Definition zufällige Ereignisse. Wir müssen lernen, mit dem Zufall umzugehen. Dazu dient der Begriff der *Wahrscheinlichkeit*. Unser Ziel wird es sein, Aussagen darüber zu machen, wie wahrscheinlich zufällige Ereignisse sind.

I.A.2 Wahrscheinlichkeit

Im normalen Sprachgebrauch gibt der Begriff *Wahrscheinlichkeit* die subjektive (Un-) Gewissheit über das Eintreten eines zufälligen Ereignisses wieder. Ein Ereignis wird als um so wahrscheinlicher bezeichnet, je sicherer man von dessen Eintreten ausgehen kann. Ereignis A wird als wahrscheinlicher als Ereignis B eingeschätzt, wenn unter gleichen Ausgangsbedingungen Ereignis A häufiger eintritt als Ereignis B.

Aufgrund der Anforderung, solche „Sicherheitsaussagen" möglichst präzise und objektiv zu machen, wurde es notwendig, Wahrscheinlichkeiten durch Zahlen auszudrücken. Wenn das Eintreten eines Ereignisses sicher ist, dann hat dieses Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1. Tritt das Ereignis ganz sicher nicht ein, so ist seine Wahrscheinlichkeit 0. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses liegt immer in dem Bereich von 0 bis 1. Je höher die Wahrscheinlichkeit ist, desto sicherer wird das Ereignis eintreten, je geringer sie ist, desto sicherer wird das Ereignis nicht eintreten. In diesem Sinne kann Wahrscheinlichkeit als Kennwert für die Eintretenssicherheit von Ereignissen aufgefasst werden. Im Unterschied zur deskriptiven Statistik bezieht sich dieser Kennwert jedoch nicht auf Daten, die schon vorliegen, sondern auf Ereignisse, die noch nicht geschehen sind.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird durch das Symbol P(A) ausgedrückt. P steht dabei als Abkürzung für „Probability".

Die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen besteht aber nicht losgelöst voneinander. Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A sehr hoch ist, z.B. P(A) =0.9, dann muss die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses P(-A) sehr klein sein, in diesem Fall P(A) = 0.1. Wenn z.B. Heilung bei einer Therapie sehr wahrscheinlich ist, dann ist Nichtheilung sehr unwahrscheinlich. Daher wird Wahrscheinlichkeit immer für *alle* Ereignisse eines Ereignisraumes Ω angegeben[1]. Dies wird als *Wahrscheinlichkeitsverteilung* bezeichnet.

Die heute als verbindlich angesehene formale Definition einer Wahrscheinlichkeitsverteilung stammt von dem russischen Mathematiker *Andrej Nicolajewitsch Kolmogoroff*. Nach Kolmogoroff spricht man von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn für Ereignisse A und B folgendes gilt:

(1) $0 \le P(A) \le 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) Schließen sich Ereignisse A und B gegenseitig aus (d.h. $A \cap B = \varnothing$), dann gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

[1] Die hier gewählte Darstellung des Konzeptes „Wahrscheinlichkeitsverteilung" ist vereinfacht und ignoriert maßtheoretische Probleme. Diese spielen jedoch für unsere praktischen Fragestellungen keine Rolle. Wer hier interessiert ist, möge sich in die mathematische Fachliteratur einarbeiten (z.B. Bauer, 2001).

Leseprobe aus Nachtigall und Wirtz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik, ISBN 978-3-7799-2890-4

Ein solches P wird *Wahrscheinlichkeitsverteilung* genannt. P(A) ist die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A.

Diese Definition enthält drei sogenannte Axiome (1) - (3). Sie drücken formal aus, was vorher in Worten über Wahrscheinlichkeit gesagt wurde: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses liegt zwischen 0 und 1 (Axiom 1) und sie wird 1, wenn das Ereignis sicher eintritt (Axiom 2). Zusätzlich ist in Axiom 3 noch festgelegt, dass sich Wahrscheinlichkeiten von vereinigten Ereignissen addieren, wenn die Ereignisse sich ausschließen.

Beispiele: Bei zufällig ausgewählten Ehepaaren in Deutschland wird nach dem Ereignis geschaut, wie viele Kinder sie haben. Es mögen folgende Wahrscheinlichkeiten gelten: P(keine Kinder) = 0.2, P(1 Kind) = 0.3, P(2 Kinder) = 0.2.

Dann gilt nach (3): P(weniger als 3 Kinder) = 0.2+0.3+0.2 = 0.7.
(3) kann angewendet werden, da niemand gleichzeitig 0, 1 oder 2 Kinder haben kann.

Bei Erwachsenen in Mitteleuropa wird nach dem Ereignis geschaut, ob sie psychische Störungen haben. Es möge gelten:
P(Angststörung) = 0.07, P(Depression) = 0.05.
Dann gilt nicht $P(\text{Angst} \cup \text{Depression}) = 0.07 + 0.05$, *denn* $P(\text{Angst} \cap \text{Depression}) \neq \emptyset$. *Es gibt Menschen, die sowohl an Angststörung als auch an Depression leiden.*

Sind bestimmte Wahrscheinlichkeiten bekannt, so kann man die Wahrscheinlichkeit anderer durch Verknüpfung entstandener Ereignisse daraus berechnen. Die folgende Liste von Rechenregeln kann dabei helfen.

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeit:

i. $P(-A) = 1-P(A)$
Das Gegenereignis $-A$ hat immer die *Gegenwahrscheinlichkeit* $1-P(A)$.

ii. $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
Ist A in B enthalten, dann kann man die Wahrscheinlichkeit für $B \setminus A$ direkt durch die Differenz der beiden Wahrscheinlichkeiten angeben.

iii. $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(B) \leq P(\Omega) = 1$
Ist A in B enthalten, dann hat B mindestens die Wahrscheinlichkeit von A.

iv. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Die Schnittmenge muss einmal subtrahiert werden, da sie sowohl in A als auch in B enthalten ist.

Diese Rechenregeln sind in Abbildung 5 und 6 illustriert. Die Wahrscheinlichkeiten werden über Venn-Diagramme dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses entspricht der Fläche des Ereignisses im Diagramm. Die Gesamtfläche entspricht der Wahrscheinlichkeit von Ω mit $P(\Omega)=1$. Hat ein Ereignis A eine größere Fläche als ein Ereignis B, so hat es auch eine größere Wahrscheinlichkeit.

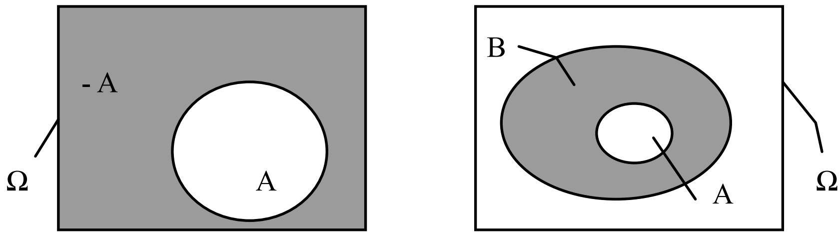

Abbildung 5: Illustrationen zu Rechenregel i (links) und den Rechenregeln ii und iii (rechts). Die graue Fläche entspricht der zu ermittelnden Wahrscheinlichkeit.

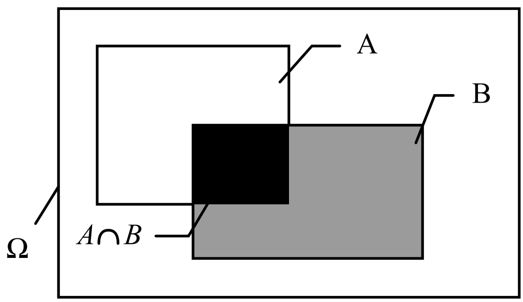

Abbildung 6: Illustration von Rechenregel iv.

Beispiele: Betrachten wir obiges Beispiel mit der Anzahl der Kinder von zufällig ausgewählten Ehepaaren. Es gilt: P(keine Kinder) = 0.2, P(1 Kind) = 0.3, P(2 Kinder) = 0.2 und P(höchstens 2 Kinder) = 0.7.

Nach Regel i ist

P(mehr als 2 Kinder) = 1-P(höchstens 2 Kinder) = 1-(0.2+0.3+0.2) = 0.3.

Nach Regel ii gilt: P(höchstens 1 Kind) = P((höchstens 2 Kinder)\(2 Kinder)) = 0.7 - 0.2 = 0.5.

Nach Regel iii ist P(mehr als 2 Kinder) ≤ P(mehr als 1 Kind).

Bei obigem Beispiel der psychischen Störungen bei Erwachsenen gilt: P(Angststörung)=0.07, P(Depression)=0.05. Zusätzlich sei bekannt, dass P(Angst ∩ Depression)=0.03 ist (Depression und Angst treten häufig gemeinsam auf). Dann ist nach Regel iv P(Angst∪Depression)=0.07+0.05-0.03 = 0.09. Erwachsene leiden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.09 mindestens an einer der beiden Störungen.