# 9 Quadratische Funktionen und Gleichungen

## 9.1 Quadratische Funktionen

In der Fahrschule lernt man: Wenn man die Geschwindigkeit in km/h durch 10 dividiert und das Ergebnis quadriert, so ergibt sich der Bremsweg in Metern.

### *Rein quadratische Funktionen*

Die Tiefe eines Brunnens kann man bestimmen, indem man z. B. einen Stein in den Brunnen fallen lässt und die Falldauer stoppt.
Hat man die Falldauer t (in Sekunden) gemessen, lässt sich die Fallstrecke s (in Metern) näherungsweise mit der Gleichung $s(t) = 5t^2$ berechnen. Beträgt die Falldauer beispielsweise 1 s, so ergibt sich für den Brunnen eine Tiefe von $s(1) = 5 \cdot 1^2 = 5$, also 5 m, bei einer Falldauer von 2 s eine Tiefe von $s(2) = 5 \cdot 2^2 = 20$, also 20 m. Man erkennt: Verdoppelt sich die Falldauer, so wird die Fallstrecke nicht etwa ebenfalls verdoppelt, sondern vervierfacht. Dies liegt daran, dass der Stein beim Fallen beschleunigt wird. Die Strecke, die der Stein während des Fallens in jeweils einer Sekunde zurücklegt, nimmt zu.

Die Gleichung $s(t) = 5t^2$ gehört zu einer **rein quadratischen Funktion**. Setzt man für t verschiedene Werte ein, so erhält man die zugehörigen Werte für s. Die Wertepaare lassen sich in einer Wertetabelle darstellen. Man erkennt: Dem 2-, 3- bzw. n-Fachen der ersten Grösse wird das 4-, 9- bzw. $n^2$-Fache der zweiten Grösse zugeordnet.

| t | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s(t) | 20 | 5 | 0 | 5 | 20 | 45 | 80 |

Fig. 1

Überträgt man die Werte in ein Koordinatensystem, so sieht man, dass die Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Man darf diese Punkte deshalb nicht geradlinig verbinden.
Den genauen Verlauf des Graphen in Fig. 2 erhält man, indem man durch Einsetzen von Zwischenwerten für t weitere Wertepaare ermittelt.
Ein Graph dieser Art heisst **Parabel**.

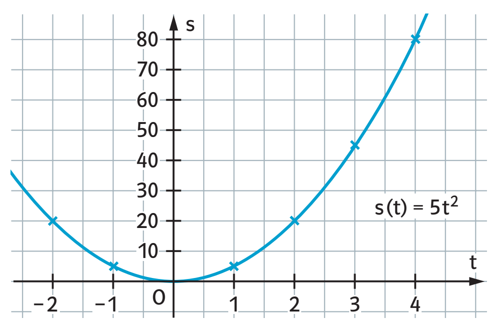
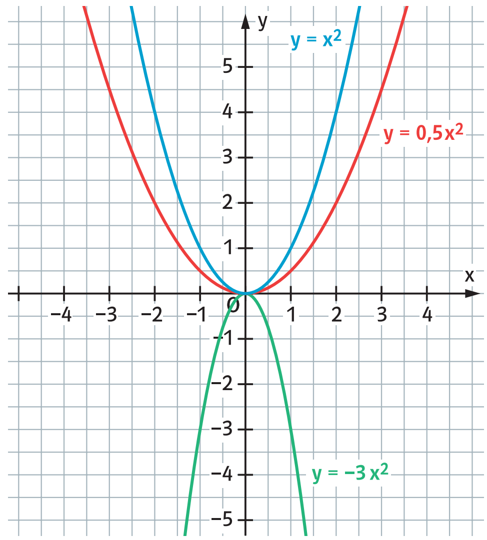



Fig. 2

Eine Funktion mit der Gleichung $\mathbf{f(x) = ax^2}$ bzw. $y = ax^2$ heisst **rein quadratische Funktion**. Ihr Graph ist eine Parabel.

Häufig verwendet man anstelle der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2$ auch $y = ax^2$. Diese Schreibweise heisst **Gleichung der Parabel**.

## Eigenschaften rein quadratischer Funktionen

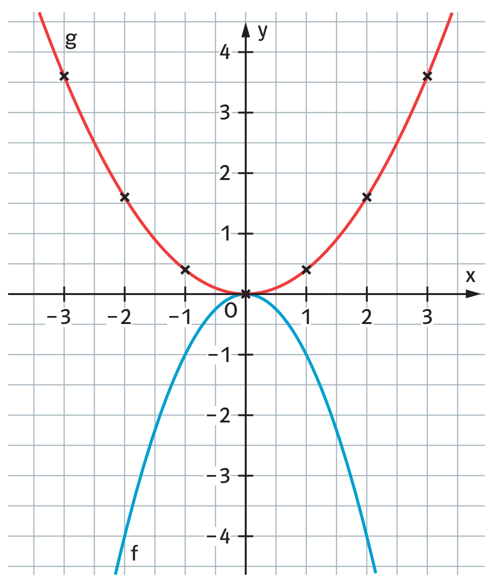



1. Jede rein quadratische Funktion $f(x) = a\,x^2$ hat an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert $f(0) = 0$. Die zugehörige Parabel verläuft also durch den Punkt $S(0|0)$. Dieser Punkt ist entweder der tiefste oder der höchste Punkt der Parabel und heisst **Scheitelpunkt** oder **Scheitel**.
2. Der Koeffizient a vor $x^2$ heisst **Streckfaktor** der Parabel. Verändert man a, so ändert die Parabel ihre Form. Je grösser der Betrag von a ist, desto schmaler wird die Parabel. Sie wird in y-Richtung gestreckt. Für $a = 1$ lautet die Gleichung der Parabel $y = x^2$. Der zugehörige Graph heisst **Normalparabel**.
Ist der Betrag von a kleiner als 1, so wird die zugehörige Parabel breiter als die Normalparabel.
3. Ist der Wert von a positiv, so ist die Parabel nach oben geöffnet. Für negative Werte von a sind die Parabeln nach unten geöffnet.

**Beispiel 1** Parabeln zeichnen
Zeichne den Graphen der Funktion mit
a) $f(x) = -x^2$
b) $g(x) = 0{,}4\,x^2$.
Lösung:
a) Der Betrag des Streckfaktors ist 1, das Vorzeichen negativ, der Graph ist also eine nach unten geöffnete Normalparabel.
b) Wertetabelle:

| x | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 3,6 | 1,6 | 0,4 | 0 | 0,4 | 1,6 | 3,6 |

Den Graphen erhält man, indem man die Werte aus der Wertetabelle in ein Koordinatensystem überträgt und die Punkte zu einer Parabel verbindet.




**Beispiel 2** Punktprobe
Liegen die Punkte $P(5|10)$ und $Q\left(-2\middle|-\frac{8}{5}\right)$ auf der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{2}{5}\,x^2$?
Lösung:
Für $x = 5$ ergibt sich $y = \frac{2}{5} \cdot 5^2 = \frac{2}{5} \cdot 25 = 10$. Daher liegt $P(5|10)$ auf der Parabel.
Für $x = -2$ ergibt sich $y = \frac{2}{5} \cdot (-2)^2 = \frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{8}{5}$. Daher liegt $Q\left(-2\middle|-\frac{8}{5}\right)$ nicht auf der Parabel.
Dass Q nicht auf der Parabel liegen kann, lässt sich auch ohne Rechnung erkennen:
Da $a > 0$ ist, können die y-Werte der Punkte der Parabel nicht negativ werden.